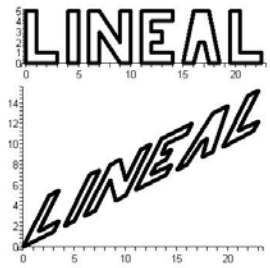
21. APLICACIONES LINEALES. MATRIZ DE UNA APLICACIÓN LINEAL



El efecto que produce el cambio de coordenadas sobre una imagen situada en el plano sugiere una forma de manipular o transformar gráficos usando álgebra lineal.

En general, una transformación o **aplicación** f es una relación entre dos conjuntos que reciben respectivamente el nombre de **conjunto inicial** y **conjunto final**, de tal forma que cada elemento del conjunto inicial se relaciona con un y sólo con un elemento del conjunto final. Si el elemento $\boldsymbol{x}$ del conjunto inicial está relacionado con el elemento $\boldsymbol{y}$ del conjunto final, se dice que $\boldsymbol{y}$ es la **imagen por $\boldsymbol{f}$** del elemento $\boldsymbol{x}$, y se representa por

$$\begin{aligned} f: C_{inicial} &\longrightarrow C_{final} \\ \boldsymbol{x} &\mapsto f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y} \end{aligned}$$

En el caso de que los conjuntos inicial y final sean $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$; dado que estos conjuntos tienen definidas unas operaciones de suma de vectores y de producto por números reales, se pueden consideran las transformaciones que conservan estas operaciones, dichas transformaciones reciben el nombre de aplicaciones lineales.

21.1. DEFINICIÓN DE APLICACIONES LINEALES

Una **aplicación** $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, se dice que es **lineal**, si verifica que:

1. $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}') = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x}')$, para todos $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^n$.
2. $f(\alpha \boldsymbol{x}) = \alpha f(\boldsymbol{x})$, para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

21.1.1. LA IMAGEN DEL VECTOR $\mathbf{0}$ MEDIANTE UNA APLICACIÓN LINEAL

Si $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es una aplicación lineal y $\boldsymbol{x}$ es cualquier vector de $\mathbb{R}^n$, se tiene que $\mathbf{0} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}$, por tanto

$$f(\mathbf{0}) = f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + f(-\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + (-1)f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$$

Así, la imagen del vector $\mathbf{0}$ por cualquier aplicación lineal es el vector $\mathbf{0}$ del espacio final.

21.1.2. TEOREMA DE DETERMINACIÓN DE APLICACIONES LINEALES

Sea $B^n = \{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \dots, \boldsymbol{u_n}\}$ una base cualquiera de $\mathbb{R}^n$ y $\{\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}, \dots, \boldsymbol{c_n}\} \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto arbitrario de n vectores de $\mathbb{R}^m$. Se verifica que existe una única aplicación lineal $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $f(\boldsymbol{e_i}) = \boldsymbol{c_i}$.

De este resultado se deduce que una aplicación lineal queda unívocamente determinada conociendo las imágenes por f de los elementos de una base del espacio inicial. La demostración del teorema se puede consultar en la bibliografía recomendada.

21.2. LINEALIDAD DE APLICACIONES DEFINIDAS POR MATRICES

Toda aplicación $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida como $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, siendo $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ una matriz de componentes reales, es una aplicación lineal.

Para demostrarlo, basta utilizar las propiedades conocidas del producto de matrices:

1. $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}') = A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}') = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{x}' = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x}')$.
2. $f(\alpha\,\boldsymbol{x}) = A(\alpha\,\boldsymbol{x}) = \alpha\,A\boldsymbol{x} = \alpha\,f(\boldsymbol{x})$.

EJEMPLO 1

Demostrar que la aplicación $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definida como $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ es una aplicación lineal y calcular la imagen por f de los siguientes vectores de $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solución

La linealidad de f se establece por las propiedades del producto matricial, en este caso, llamando $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ se tiene que:

1. $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}') = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}') = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}' = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x}')$.
2. $f(\alpha\,\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}(\alpha\,\boldsymbol{x}) = \alpha\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} = \alpha\,f(\boldsymbol{x})$.

Las imágenes de los vectores pedidos son:

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Se observa que las imágenes de los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ coinciden respectivamente con las columnas 1ª y 2ª de la matriz que define la aplicación.

EJEMPLO 2

Dadas las aplicaciones $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y $g: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definidas como:

$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix}$, y $g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 - x_3 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \end{pmatrix}$, demostrar que son aplicaciones lineales.

Solución

Se tiene que $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Así, la aplicación f está definida por $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, por tanto se trata de la misma aplicación del ejemplo 1, donde ya se demostró que es lineal. Respecto a g se tiene que:

$$g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Llamando $A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ la aplicación está definida por: $g(\boldsymbol{x}) = A'\boldsymbol{x}$.

Para demostrar que g es lineal, basta con repetir los puntos (1) y (2) del ejemplo anterior, sustituyendo la matriz A por la matriz A'. Se observa además que las imágenes de los vectores de la base canónica coinciden respectivamente con las columnas 1ª, 2ª y 3ª de la matriz A':

$$g\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

OBSERVACIÓN

En general si $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es una aplicación lineal definida por $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, siendo $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ matriz de componentes reales y $B_c^n = \{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$, se verifica que para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $f(\boldsymbol{e_i}) = A\boldsymbol{e_i} = \boldsymbol{c_i}$ donde $\boldsymbol{c_i}$ es la columna i −ésima de la matriz A.

En otras palabras, la matriz A que define la aplicación lineal f tiene por columnas las imágenes de los elementos de la base canónica.

En el siguiente apartado se comprueba que en realidad toda aplicación lineal $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tiene una expresión $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, donde la matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ tiene en sus columnas las imágenes de los elementos de la base canónica.

21.3. MATRIZ EN BASES CANÓNICAS DE UNA APLICACIÓN LINEAL

Sea $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal y sea $B_c^n = \{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$, se tiene que para todo vector $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e_1} + x_2\boldsymbol{e_2} + \cdots + x_n\boldsymbol{e_n}$$

Por la linealidad de la aplicación f se verifica que

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1\boldsymbol{e_1} + x_2\boldsymbol{e_2} + \cdots + x_n\boldsymbol{e_n}) = x_1 f(\boldsymbol{e_1}) + x_2 f(\boldsymbol{e_2}) + \cdots + x_n f(\boldsymbol{e_n})$$

Es decir, el vector $f(x)$ se puede escribir como combinación lineal de los vectores $f(\boldsymbol{e_1})$, …,$f(\boldsymbol{e_n})$:

$$f(\boldsymbol{x}) = x_1 f(\boldsymbol{e_1}) + x_2 f(\boldsymbol{e_2}) + \cdots + x_n f(\boldsymbol{e_n})$$

Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ es la matriz cuyas columnas son los vectores $f(\boldsymbol{e_i})$, la igualdad anterior se puede escribir como:

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(\boldsymbol{e_1}) & f(\boldsymbol{e_2}) & \dots & f(\boldsymbol{e_n}) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Se deduce que conociendo las imágenes de los elementos de la base canónica, se puede determinar la imagen de cualquier otro vector $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, multiplicando la matriz A por las coordenadas del vector $\boldsymbol{x}$ en la base canónica.

La matriz A (cuyas columnas son las coordenadas de $f(\boldsymbol{e_i})$ en la base B_c^m) recibe el nombre de **matriz en bases canónicas de la aplicación lineal $\boldsymbol{f}$**, y se nota por

$$A = M(f, B_c^n, B_c^m)$$

EJEMPLO 3

Calcular la matriz en bases canónicas de la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ que verifica que

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución

La matriz en bases canónicas de la aplicación lineal es la que tiene en sus columnas las coordenadas de los vectores $f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ en la base B_c^4.

Por los datos del problema se sabe que $f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$, que corresponde a la primera columna de la matriz buscada. Por otra parte, se verifica que:

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\2\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\\1\end{pmatrix}$$

Lo que corresponde a la segunda columna de la matriz A. Por último:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

De donde se deduce que:

$$f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\2\\1\\-2\end{pmatrix}$$

Así que la matriz buscada es:

$$A = M(f, B_c^3, B_c^4) = \begin{pmatrix}0 & 3 & -2\\-1 & 2 & 2\\0 & 1 & 1\\1 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

21.4. LA APLICACIÓN LINEAL PROYECCIÓN ORTOGONAL

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un subespacio vectorial. Se llama aplicación proyección ortogonal sobre S a la aplicación lineal $p_S: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ en la que la imagen de cada vector $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ es su proyección ortogonal sobre S:

$$\begin{aligned} p_S: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto p_S(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

EJEMPLO 4

Calcular la matriz en bases canónicas de la proyección ortogonal sobre el subespacio S que tiene por base $B_S = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Solución

Se comienza por obtener una base ortogonal del subespacio S:

$$\boldsymbol{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a'_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Una base ortogonal del subespacio S es: $B_S^{og} = \left\{ \boldsymbol{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

Se calcula ahora la proyección ortogonal sobre S de cada uno de los elementos de la base canónica

$$B_c^3 = \left\{ \boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$p_S(\boldsymbol{e_1}) = \widehat{\boldsymbol{e_1}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$p_S(\boldsymbol{e_2}) = \widehat{\boldsymbol{e_2}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$p_S(\boldsymbol{e_3}) = \widehat{\boldsymbol{e_3}} = \frac{0}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

De donde se deduce que la matriz de la proyección ortogonal sobre S en bases canónicas es:

$$A = M(p_S, B_c^3, B_c^3) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz obtenida verifica que es simétrica: $A^t = A$

Además:

$$A^2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & -3 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = A$$

21.4.1. MATRICES IDEMPOTENTES

Se llama matriz **idempotente** a toda matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ que verifica que $A^2 = A$.

OBSERVACIÓN

Como se verá a lo largo de las unidades siguientes, toda matriz simétrica e idempotente es la matriz de una proyección ortogonal y toda matriz de una proyección ortogonal es simétrica e idempotente.